

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПУЗЫРЬКА ВОЗДУХА В ВОДЕ

А.А.Аганин, М.А.Ильгамов

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, г. Казань
www.sci.kcn.ru/imm

Обычно при изучении колебаний пузырька газа в жидкости уравнения газовой динамики применяются только для описания газа. Их использование для моделирования обеих сред было осуществлено в [1]. Второй подход требует значительно больше компьютерного времени, так как уравнения газовой динамики решаются численно. В [2,3] показано, что существенно повысить экономичность вычислений без ущерба для точности можно путем совместного применения уравнений газовой динамики и их приближений. В настоящей работе подход [2,3] развивается на случай постановки задачи с учетом теплопроводности газа и жидкости. Приводятся результаты исследования влияния теплопроводности на динамику пузырька воздуха в воде. Показано, что решения с учетом и без учета теплопроводности могут быть существенно различными.

Постановка задачи. В пучности стоячей волны давления в центре сферического объема жидкости колеблется пузырек малых размеров по сравнению с длиной волны. Давление в пучности изменяется по закону

$$p_{ex}(t) = p_{ex}^0 - \Delta p_{ex} \sin \omega t, \quad p_{ex}^0 = p_{ex}(0), \quad (1)$$

где Δp_{ex} , ω – амплитуда и частота колебаний, t – время. В силу малых размеров наличие пузырька оказывает влияние лишь на состояние жидкости в области $r_b \leq r \leq r_{ex}$, где r – пространственная координата, отсчитываемая от центра пузырька, $r_b = r_b(t)$ – радиус пузырька, $r_{ex} = r_{ex}(t)$, $r_b/r_{ex} \sim 0.1$, $\delta r_{ex} = r_{ex} \omega / (2\pi c_f^0) \ll 1$, c_f^0 – скорость звука в жидкости (верхний индекс 0 указывает на отношение параметра к невозмущенному состоянию, а нижний индекс f – к жидкости). По-

сколько $\delta \gamma_{ex} \ll 1$, то с точностью до слагаемых более высокого порядка малости относительно $\delta \gamma_{ex}$ давление на поверхности $r = r_{ex}$ подчиняется закону (1).

Для описания радиальных движений газа и жидкости используются уравнения газовой динамики с учетом теплопроводности

$$(\rho g^2)_t + (\rho g^2 u)_r = 0, \quad (\rho g^2 u)_t + (p g^2 + \rho g^2 u^2)_r = 0, \quad (2a, b)$$

$$(E g^2)_t + [r^2(p + E)u]_r = -(r^2 W)_r, \quad W = -\kappa T_r. \quad (2c, d)$$

Здесь T – температура, $\epsilon = (E/\rho) - u^2/2$ – удельная внутренняя энергия, p – давление, ρ – плотность, u – скорость, E – удельная на единицу объема полная энергия, κ – коэффициент теплопроводности. Нижние индексы t и r означают частные производные.

Граничные условия задачи имеют вид

a) $r=0$: $u(0, t)=0$, $T_r=0$;

b) $r=r_b$: $u_b^- = u_b^+ = u_b$, $T_b^- = T_b^+$, $p_b^- = p_b^+ + 4\mu_f(u_b/r_b) + 2(\Sigma/r_b)$,
 $W_b^- = W_b^+$;

c) $r=r_{ex}$: $p(r_{ex}, t)=p_{ex}(t)$, $T(r_{ex}, t)=T^0$.

Здесь нижний индекс b означает отношение параметра к поверхности пузырька, знаки \pm указывают на отношение к поверхности со стороны газа ($-$) и жидкости ($+$), Σ – коэффициент поверхностного натяжения, μ_f – динамический коэффициент вязкости жидкости. При $t=0$ полагается

$$u=0, \quad T=T^0, \quad p=p_g^0=p_f^0+2(\Sigma/r_b^0) \quad \text{при} \quad 0 < r \leq r_b^0, \quad r_b^0=r_b(0),$$

$$u=0, \quad T=T^0, \quad p=p_f^0=p_{ex}^0 \quad \text{при} \quad r_b^0 < r \leq r_{ex}^0, \quad r_{ex}^0=r_{ex}(0).$$

Уравнения состояния. Для газа (воздуха) используются выражения [1]

$$p=p_1 \quad \text{при} \quad \rho \leq \rho_*, \quad p=p_1+p_2+p_3 \quad \text{при} \quad \rho > \rho_*,$$

$$\epsilon=\epsilon_1 \quad \text{при} \quad \rho \leq \rho_0, \quad \epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2 \quad \text{при} \quad \rho > \rho_0,$$

$$p_1=\rho RT(1+v_D)(1+v), \quad p_2=\frac{\epsilon_c \rho_0}{1-(3/k)} \left[(\rho/\rho_0)^{\frac{k}{3}+1} - (\rho/\rho_0)^2 \right],$$

$$p_3=-p_2(\rho_*),$$

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{5}{2}RT + \frac{R\Theta}{e^{\Theta/T} - 1} \right] (1 - \nu_D) + \nu_D RT_D + \frac{3}{2}RT(2\nu_D)(1 + \nu) + 2\nu_D R \sum_{i=1}^5 \nu_i T_i,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_c}{(k/3) - 1} \left[(\rho/\rho_0)^{k/3} - \frac{k}{3}(\rho/\rho_0) \right] + \varepsilon_c, \quad \nu = \sum_{i=1}^5 \nu_i,$$

$$\nu_i = 0.5 \left[\text{th}(7TT_i^{-1} - 6.3) + \text{th}6.3 \right], \quad \rho_* = \rho_0 (6/(k+3))^{3/(k-3)}.$$

Принято $T_D = 9.7$ эв, $T_{1-5} = 14.5, 29.6, 47.4, 77.5, 97.5$ эв, $\Theta = 3340$ К, $k = 9$, $\rho_0 = 1113$ кг/м³, $\varepsilon_c = 2.52 \cdot 10^5$ Дж/кг. При комнатных температурах и давлениях используются уравнения $p = \rho RT$, $\varepsilon = RT/(\gamma - 1)$.

Уравнения состояния жидкости (воды) принимаются в виде [4]

$$p = (1 + \delta) \frac{G_1 + G_2\sigma + G_3\sigma^2 + G_4\sigma^3}{G_5 + G_6\sigma + G_7\sigma^2}, \quad G_i = \sum_{j=0}^3 A_{ij}\delta^j, \quad T = T(p, \varepsilon),$$

где давление p выражено в ТПа, $\delta = (\rho/\rho_{**}) - 1$, $\sigma(\text{ТПа}) = \varepsilon\rho_{**}$, $\rho_{**} = 998$ кг/м³. Безразмерные коэффициенты A_{ij} и зависимость $T = T(p, \varepsilon)$ определяются табличными значениями [4]. При давлениях ниже p_f^0 полагается $p = (\Gamma - 1)p\varepsilon + k_1^2(p - k_2)$, где $\Gamma = 1.015$, $k_1^2 = 2.25 \cdot 10^6$ м²/с², $k_2 = 998$ кг/м³.

Приближения. В ходе относительно медленного расширения сжатия пузырька в слое $\Gamma_b \leq \Gamma \leq \Gamma_{ex}$ можно принять $|\delta\rho_f| \sim M_{bf}^2$, где $\delta\rho_f = (\rho - \rho_f^0)/\rho_f^0$, $M_{bf} = u_b/c_f^0$. Тогда при $M_{bf}^2 < M_{bf*}^2 \ll 1$, где M_{bf*}^2 — малое число, можно вместо (2) применять следующее приближение

$$u_r + 2u\Gamma^{-1} = 0, \quad u_t + u u_r + p_r (\rho_f^0)^{-1} = 0, \quad p - p^0 = (c_f^0)^2 (\rho - \rho_f^0). \quad (3)$$

В рамках этого приближения имеем

$$-\frac{1}{\Gamma_b} Q' + \frac{u_b^2}{2} + \frac{p_b^+ - p_{ex}}{\rho_f^0} + \frac{\Gamma_b}{\rho_f^0 c_f^0} (p_b^+ - p_{ex})' = 0, \quad (4)$$

где $Q = \Gamma_b^2 u_b$, а штрих означает производную по времени.

Решение системы (3) в слое $\Gamma_b \leq \Gamma \leq \Gamma_{ex}$ имеет вид

$$u = Q\Gamma^{-2}, \quad p = p_b + \rho_f^0 (\Gamma^{-1} - \Gamma_b^{-1}) Q' - 0.5 \rho_f^0 (\Gamma^{-4} - \Gamma_b^{-4}) Q^2, \\ \rho = \rho_f^0 + (p - p^0) (c_f^0)^{-2}. \quad (5)$$

Если в жидкости используется приближение (3), то граничное ус-

ловие на поверхности пузырька изменяется на $T_b^- = T^0$.

Внутри пузырька при $M_{bg}^2 < M_{bg*}^2 \ll 1$ ($M_{bg} = u_b/c_g^0$, M_{bg*}^2 – малое число) и $|\delta T_b| < \delta T_{b*} \ll 1$ ($\delta T_b = (T - T^0)/T^0$, δT_{b*} – малое число) можно использовать приближение, в рамках которого при $u_b < 0$ решение имеет вид

$$T = T^0 + \frac{u_b p_g^0 (r_b^0)^3}{\kappa r_b^4} \frac{r^2 - r_b^2}{2}, \quad u = \frac{u_b r}{r_b}, \quad \rho = (\bar{\rho}_b + \Delta \rho) \frac{T^0}{T}, \quad u_b = \frac{Q}{r_b}, \quad (6a-c)$$

$$p_b = (\bar{\rho}_b + \Delta \rho) R T, \quad \Delta \rho = \bar{\rho}_b + \frac{3A}{r_b^3 C} \left(r_b - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{C}} \ln \left| \frac{\sqrt{B/C} + r_b}{\sqrt{B/C} - r_b} \right| \right), \quad (6d-e)$$

где

$$A = 2\kappa r_b \bar{\rho}_b, \quad B = 2\kappa r_b - R \bar{\rho}_b u_b r_b^2, \quad C = -R \bar{\rho}_b u_b.$$

Результаты расчетов. Ниже приводятся результаты расчетов при $\omega = 2\pi(26.5 \text{ кГц})$, $r_b^0 = 4.5 \text{ мкм}$, $r_{ex}^0 = 50 \text{ мкм}$, $p_g^0 = 1.32 \text{ бар}$, $\rho_f^0 = 998 \text{ кг/м}^3$, $p_f^0 = 1 \text{ бар}$, $T_f^0 = T_g^0 = T^0 = 298.15 \text{ К}$, $\mu_f = 0.003 \text{ кг/(м·с)}$, $\kappa_f = 0.58 \text{ Вт/(м·К)}$, $\kappa_g = 0.0258 \text{ Вт/(м·К)}$, $\Sigma = 0.0725 \text{ кг/с}^2$. При $0 \leq t \leq t_*$ используются приближения, а при $t > t_*$ – уравнения (2). Время t_* определяется нарушением одного из следующих условий

$$M_{bf}^2 < M_{bf*}^2, \quad M_{bg}^2 < M_{bg*}^2, \quad |\delta T_b| < \delta T_{b*}. \quad (7a-c)$$

В рамках приближений в газе и жидкости решение находится численным интегрированием уравнения (4) при $p_b^+ = p_b - 4\mu_f(u_b/r_b) - 2(\Sigma/r_b)$, где p_b рассчитывается по формуле (6e). Распределение параметров в газе определяется выражениями (5), а в жидкости – (6).

Численное решение системы (2) находится методом С.К.Годунова. В газе сетка равномерная подвижная (300 ячеек). В жидкости сетка также подвижная (700 ячеек), но с шагом, увеличивающимся от поверхности пузырька по геометрической прогрессии. Коэффициент увеличения шага определяется из условия равенства радиального размера ячейки жидкости возле пузырька 1/4 размера ячеек равномерной

сетки в области пузырька.

Вычислительные эксперименты показали, что удовлетворительный компромисс между точностью и экономичностью можно достигнуть, например, при $M_{bf*}^2 = M_{bg*}^2 = 0.04$, $\delta T_{b*} = 0.05$.

На рис. 1 приведены пространственные распределения параметров p , ρ , u и T возле центра пузырька для 6 последующих моментов времени t_{1-6} (кривые 1-6) для амплитуды $\Delta p_{ex} = 1.55$ бар. Радиальное положение поверхности пузырька отмечено жирной точкой. Представлены решения с учетом (а) и без учета (б) теплопроводности. В обоих случаях финальная стадия схлопывания пузырька начинается с гладкого распределения параметров в обеих средах (кривые 1). Наибольшее качественное сходство среди кривых 1 наблюдается у давления и скорости. При этом в случае без учета теплопроводности давление вблизи центра пузырька в несколько раз меньше. Отсутствие теплопроводности приводит к возникновению разрыва на контактной поверхности. Теплопроводность устраняет его и вызывает смещение максимума температуры от поверхности пузырька к центру. При учете теплопроводности более плавным является также и профиль плотности в области перехода от газа к жидкости.

С течением времени распределения параметров газа в пузырьке становятся все более нелинейными. Максимальное значение температуры в варианте с учетом теплопроводности смещается из центра в область поверхности пузырька (кривые 2-4). В обоих вариантах в момент времени t_4 наблюдается образование ударной волны. Интенсивность ударной волны по мере ее распространения к центру пузырька быстро нарастает.

При $t \geq t_6$ решения с учетом и без учета теплопроводности становятся качественно различными. В решении с учетом теплопроводности вскоре после времени t_6 происходит фокусировка сходящейся ударной волны в

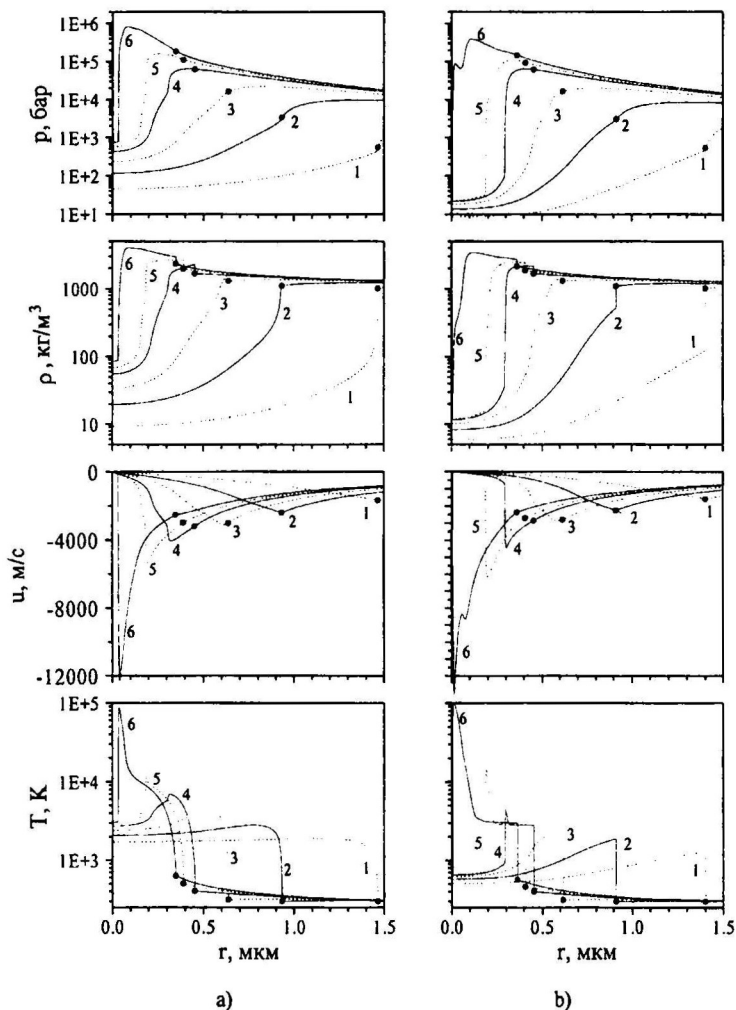


Рис. 1

центре пузырька. В результате этого возникает расходящаяся ударная волна, интенсивность которой по мере ее удаления от центра уменьшается. Через некоторое время расходящаяся ударная волна взаимодействует с поверхностью пузырька, в результате чего в жидкость уходит ударная волна, а в газ – волна разрежения. Поведение решения

без учета теплопроводности при $t > t_5$ имеет иной характер. Вскоре после времени t_6 сходящаяся ударная волна фокусируется в центре пузырька. В результате этого образуется расходящаяся ударная волна. Навстречу ей распространяется сходящаяся простая волна сжатия (кривые 6, $g \approx 0.1 \text{ мкм}$). Через небольшой промежуток времени сходящаяся волна сжатия и расходящаяся ударная волна вступают во взаимодействие. Далее сходящаяся волна сжатия превращается во вторую сходящуюся ударную волну, которая вскоре фокусируется в центре пузырька. В результате этого возникает вторая расходящаяся ударная волна, которая быстро догоняет первую, и они объединяются в одну расходящуюся ударную волну. В последующем решение ведет себя так же, как и в случае с учетом теплопроводности.

Варьирование амплитуды Δp_{ex} в интервале $0.15 \leq \Delta p_{ex} \leq 1.75 \text{ бар}$ с шагом 0.1 бар показывает, что в этом интервале оба решения, и с учетом, и без учета теплопроводности, при $\Delta p_{ex} < 1.55 \text{ бар}$ качественно подобны решению при $\Delta p_{ex} = 1.55 \text{ бар}$ с учетом теплопроводности, а при $\Delta p_{ex} > 1.55 \text{ бар}$ – решению при $\Delta p_{ex} = 1.55 \text{ бар}$ без учета теплопроводности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00234).

ЛИТЕРАТУРА

1. Moss W.C. *et al. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence* //Phys. Fluids. – 1994. – V.6. N9. – P.2979-2985.
2. Аганин А.А., Нигматулин Р.И., Ильгамов М.А., Ахатов И.Ш. *Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости* //Докл. АН России (в печати).
3. Aganin A.A. *Dynamics of a small bubble in a compressible fluid* //Int. J. Numerical Methods in Fluids (in press).
4. Ree F.H. *Equation of State of Water* //LLNL Report UCRL-52190. – 1976.